PUISSANCES ET RACINES DES NOMBRES

Considérons un nombre quelconque a et multiplions-le n fois par lui-même :

$$N = \underbrace{a \times a \times a \times ... a}_{\text{n fois}}$$

Nous dirons que ce nombre a est **élevé à la puissance n** et nous écrirons :

$$N = \underbrace{a \times a \times a \times ... a}_{\text{n fois}} = a^n$$

Dans cette écriture le nombre n est appelé **exposant**.

Si par exemple a = 10, nous pourrons avoir des valeurs telles que :

$10^1 = 10$

$10^2 = 10 \times 10 = 100$

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\ 000$

etc.

L'intérêt de cette écriture est évident pour les grands nombres que l'on peut toujours écrire sous la forme d'un facteur allant de 1 à 9, 9999… multiplié par une puissance de 10, par exemple :

$1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 1 \times 10^{12} = 10^{12}$

$61\ 327\ 000\ 000\ 000\ 000 = 6,\ 132\ 7 \times 10^{16}$

Dans la plupart des cas, il est toutefois préférable d'utiliser des **exposants multiples de 3** qui correspondent mieux aux habitudes de la numération : mille, un million, un milliard, etc.

$61\ 327\ 000\ 000\ 000\ 000 = 61,\ 327 \times 10^{15}$

Prenons maintenant le problème à l'envers. Au lieu de chercher ce qui se passe lorsque nous élevons un nombre à la puissance n, essayons de trouver quel est le nombre inconnu x qui, élevé à la puissance n, donnera un autre nombre fixé à l'avance :

$x^n = N$

Par définition, x sera appelé **racine nième de N**. Si n = 2, nous aurons affaire à une **racine carrée**, si n = 3, à une **racine cubique**, si n = 4, à une **racine quatrième**, etc.

La notation habituelle d'une racine est la suivante :

$$\text{si } x^n = N, \text{ alors } x = \sqrt[n]{N}$$

Bien entendu, la définition que nous venons de donner nous permet d'écrire :

$$(\sqrt[n]{N})^n = N$$

Pour les racines carrées, il est d'usage de ne pas préciser la valeur de n.

Voici quelques exemples numériques :

racines carrées :

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{100} = 10$

$\sqrt{2} = 1{,}414...$ (c'est une valeur usuelle !)

$\sqrt{3} = 1{,}732...$ (celle-là aussi !)

racines cubiques :

$\sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[3]{125} = 5$

racine sixième :

$\sqrt[6]{64} = 2$

etc.

Remarques importantes :

1) sauf en faisant appel aux nombres complexes, qui sortent largement du cadre de cet exposé, **on ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre négatif**.

2) la racine carrée d'un nombre est **PAR DEFINITION** un nombre positif.

Ainsi,

$\sqrt{4} = 2$ et non pas -2 !!!!!